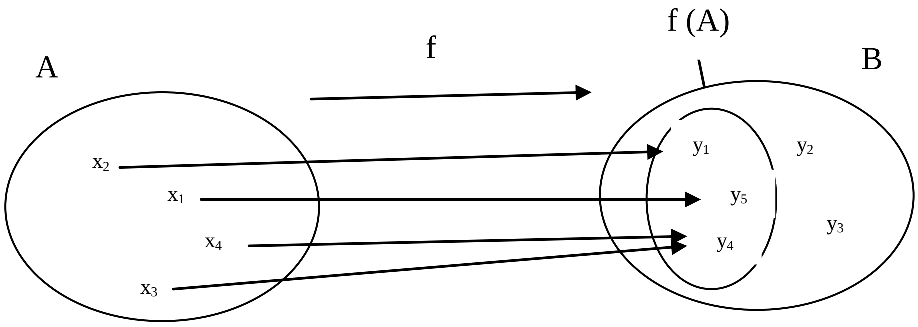
Funzione reale di variabile reale

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\Re$.

Si chiama ***funzione reale di variabile reale***, di *A* in *B,* una qualsiasi legge che faccia corrispondere, a ***ogni*** elemento $x \in A$ ***uno e un solo*** elemento $y \in B$. In simboli:

$$f : A \to B$$



• A è detto ***dominio***

• $f\ (A)\ \subseteq B$ è detto ***codominio*** (può coincidere con B)

• *x* è detta ***variabile indipendente***

• *y* è detta ***variabile dipendente***

L'elemento *y* = *f(x)* si dice anche ***immagine*** dell'elemento *x* tramite f; mentre l'elemento $x \in A$ si chiama anche ***controimmagine*** di y.

• Si chiama ***grafico*** di una funzione f di A in B, l'insieme:

$$G = \{(x; y)\ \setminus x \in A\ \ e\ f(x)\ \in B\}$$

• Una funzione si dice ***matematica*** se può essere espressa analiticamente da un insieme di operazioni matematiche ben definite che, applicate in un certo ordine a *x*, fanno determinare il corrispondente valore di y.

Dati due numeri reali *a*, *b* con *a* < *b*, si chiama:

• ***intervallo aperto*** l'insieme di tutti i numeri reali *x* tali che:

$a < x < b$ *e* si indica con $]a; b[$

• ***intervallo chiuso*** l'insieme di tutti i numeri reali *x* tali che:

$a \leq x \leq b$ e si indica con *[a; b]*

• ***intervallo aperto a destra*** l'insieme di tutti i numeri reali *x* tali che:

$a \leq x < b$ e si indica con *[a; b[*

• ***intervallo aperto a sinistra*** l'insieme di tutti i numeri reali *x* tali che:

$a < x \leq b$ e si indica con *]a; b]*

In ogni caso l'ampiezza dell'intervallo è il numero *b-a*

Dato un numero reale *a* qualunque, si chiamano:

• ***intervalli illimitati superiormente*** (rispettivamente, aperti e chiusi) gli insiemi:

$\{x \in \Re \setminus x > a\}$, $\{x \in \Re \setminus x \geq a\}$ e si indicano con: $]a,+\infty[$ e $[a,+\infty[$

• ***intervalli illimitati inferiormente*** (rispettivamente, aperti e chiusi) gli insiemi:

$\{x \in \Re \setminus x < a\}$, $\{x \in \Re \setminus x \leq a\}$ e si indicano con: $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$

Si chiama:

• ***intorno completo*** di un numero reale *c* un intervallo aperto qualsiasi che contenga *c;*

$$se\ c = 3\ l'intorno\ completo\ può\ essere\ ]2\,;5[$$

• ***intorno destro*** di un numero reale *c* un intervallo aperto qualsiasi che abbia come estremo sinistro *c;*

$$se\ c = 3\ l'intorno\ destro\ può\ essere\ ]3\,;5[$$

• ***intorno sinistro*** di un numero reale *c* un intervallo aperto qualsiasi che abbia come estremo destro *c;*

$$se\ c = 3\ l'intorno\ sinistro\ può\ essere\ ]1\,;3[$$

intorno di $+\infty$ ogni intervallo aperto illimitato superiormente;

$$l'intorno\ di + \infty\ può\ essere\ ]-3\,;\,+\infty[\,,una\ qualsiasi\ semiretta\ del\ tipo\ ]a;\,+\infty[$$

intorno di $-\infty$ ogni intervallo aperto illimitato inferiormente;

$$l'intorno\ di - \infty\ può\ essere\ ]-\infty\,;\,[\,,una\ qualsiasi\ semiretta\ del\ tipo\ ]-\infty\,;a\,[$$

Le funzioni di questo tipo si distinguono in:

- Algebriche
  - Razionali
    - Intere
    - Fratte
  - Irrazionali
    - Intere
    - Fratte
- Trascendenti
  - Esponenziali
  - Logaritmiche
  - Goniometriche
  - …….

, Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice:

• ***suriettiva***, se ogni elemento di *B* è immagine di almeno un elemento di *A*, cioè se risulta: *f(A) = B*

$$\forall \ y \in B \ esiste \ almeno \ un \ x \ \in A \ che \ ha \ per \ immagine \ y$$

• ***iniettiva***, se fa corrispondere a elementi distinti di *A* elementi distinti di *B*

$$\forall \, \mathrm{x}_1 \ e \ x_2 \ \in A \ con \ x_1 \ \neq \ x_2 \ \Longrightarrow f\ (x_1) \ \neq f\ (x_2)$$

• ***biiettiva***, se è, allo stesso tempo, iniettiva e suriettiva

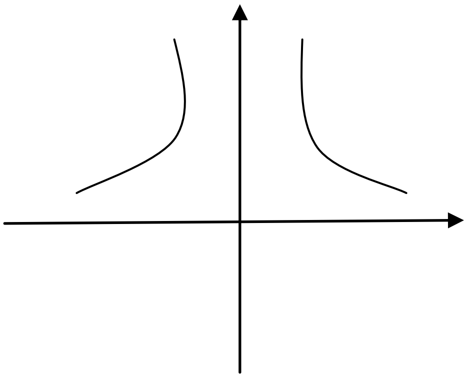
Si dice che due insiemi *A e B*, non vuoti, sono in ***corrispondenza biunivoca***, quando esiste una legge che associa a ogni elemento di *A* uno e un solo elemento di *B* e, viceversa, ogni elemento di *B è* associato a uno e un solo elemento di *A* (ossia la relazione che mette in corrispondenza A e B è una funzione biiettiva).

• ***Pari***, se risulta:

f(-x) = f(x), $\forall x \in A$

$y = 2x^4 - 5x^2 + 1$

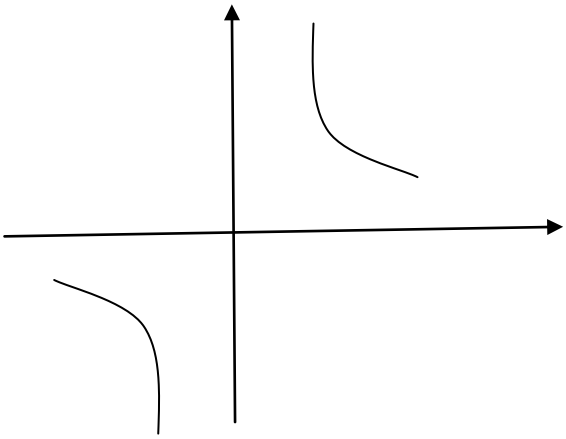
Le incognite hanno esponenti pari



• ***Dispari***, se risulta:

f(-x) = - f(x), $\forall x \in A$

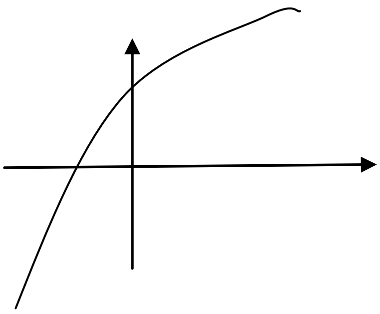
$y = 3x^5 - 2x^3 + 5x$



• ***Monotona***:

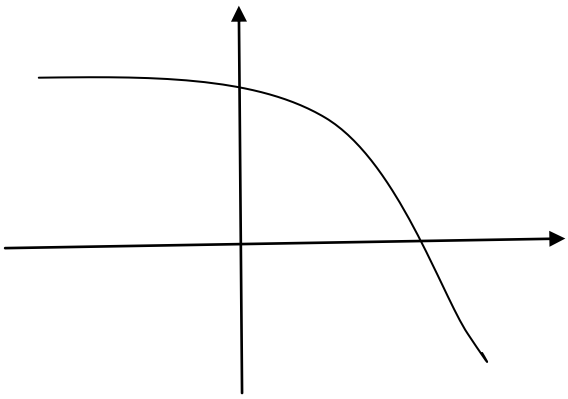
- ***crescente***, se risulta:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in A$



- ***decrescente***, se risulta:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in A$



Dominio

- ***Funzioni razionali intere***: *D* = IR

$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ $\qquad y = \frac{2x^2-3x+5}{4}$ $\qquad D$ = IR

- ***Funzioni razionali fratte*** del tipo $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D = \{x \in \Re \setminus g(x) \neq 0\}$

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x - 2}$$

$4x - 2 \neq 0 \quad 4x \neq +2 \quad \frac{4x}{4} \neq \frac{2}{4} \quad x \neq \frac{1}{2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ o $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq \frac{1}{2}\right\}$

- ***Funzioni* irrazionali intere**

- del tipo $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con n pari: $D = \{x \in \Re \setminus f(x) \geq 0\}$

$y = \sqrt[4]{3x - 5}$

$3x - 5 \geq 0 \quad 3x \geq +5 \quad \frac{3x}{3} \geq \frac{5}{3} \quad x \geq \frac{5}{3}$

$D = \left[\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$ oppure $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq \frac{5}{3}\right\}$

- del tipo $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari $D = \Re$

$y = \sqrt[3]{4x + 2}$ $\qquad D$ = IR

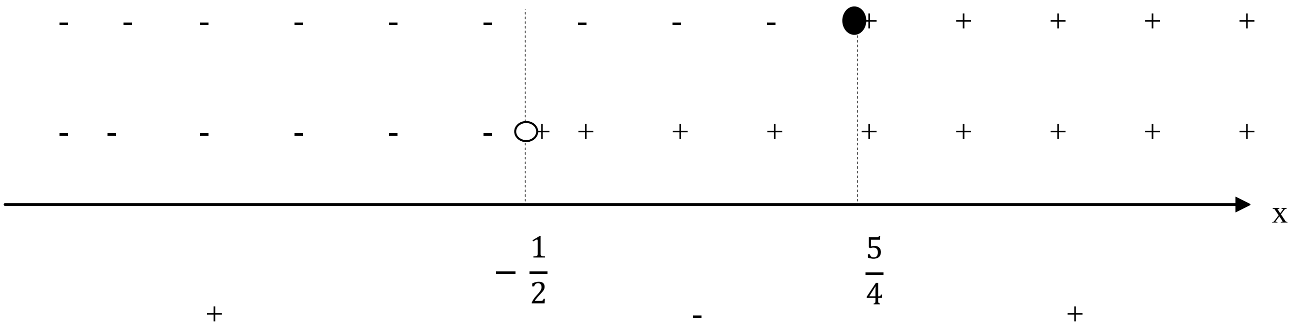
- ***Funzioni* irrazionali fratte**

- del tipo $y = \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}}$ con n pari: $D = \left\{x \in \Re \setminus \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\right\}$

$y = \sqrt[4]{\frac{4x-5}{2x+1}} \qquad \frac{4x-5}{2x+1} \geq 0$

$N \geq 0 \quad 4x - 5 \geq 0 \quad 4x \geq +5 \quad \frac{4x}{4} \geq \frac{5}{4} \quad x \geq \frac{5}{4}$

$D > 0 \quad 2x + 1 > 0 \quad 2x > -1 \quad \frac{2x}{2} > \frac{-1}{2} \quad x > -\frac{1}{2}$



$D = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{4}\,;\,+\infty\right[$ oppure $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{5}{4}\right\}$

- del tipo $y = \sqrt[n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ con n dispari $D = \{x \in \Re \setminus g(x) \neq 0\}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{4x-5}{2x+1}}$$

$2x + 1 \neq 0$ $\quad$ $2x \neq -1$ $\quad$ $\dfrac{2x}{2} \neq -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $x \neq -\dfrac{1}{2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ o $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq -\frac{1}{2}\right\}$

Intersezione con l'asse delle x

Per trovare le intersezioni con l'asse delle x si deve impostare e poi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si deve porre il numeratore uguale a zero e con la formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ si risolve l'equazione al di fuori del sistema.

$$y = \frac{2x^2 - 3x - 5}{4}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2-3x-5}{4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x^2-3x-5}{4} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(-1\,;0)$$

$$\searrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad B\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{+3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{+3-7}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ \frac{+3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

N.B. Devi sempre verificare che le soluzioni trovate siano accettabili (x_1 e x_2 appartengono al dominio o sono esclusi??).

Il numero delle intersezioni con l'asse delle x dipendono dal grado del numeratore.

Intersezione con l'asse delle y

Per trovare l'intersezione con l'asse delle y (ce ne può essere solo una per definizione di funzione) si deve impostare e poi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

Es.

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{4}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2-3x+5}{4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{2\cdot 0^2-3\cdot 0+5}{4} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{5}{4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad C\left(0\,;\,\frac{5}{4}\right)$$

Positività

Per sapere in quali intervalli la funzione è positiva si deve risolvere la seguente disequazione di secondo grado.

(*Equazione di secondo grado*: uguaglianza tra due espressioni algebriche in almeno una della quali deve comparire l'incognita con massimo esponente due)

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \Re$ e $a \neq 0$

Formula risolutiva: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con delta $\Delta = b^2 - 4ac$

Il delta Δ può essere:

$\Delta > 0$	2 soluzioni reali e distinte
$\Delta = 0$	2 soluzioni reali e coincidenti
$\Delta < 0$	2 soluzioni complesse e coniugate $d \pm ej$

Se il termine di primo grado bx o il termine noto c non compaiono significa che b o c sono uguali a zero.

(Una disequazione razionale intera si dice **quadratica, o di secondo grado,** quando è riconducibile alla forma $ax^2 + bx + c > 0$, oppure $ax^2 + bx + c < 0$, con $a \neq 0$)

Dopo aver determinato, se esistono, le soluzioni x_1 *e* x_2 (con $x_1 > x_2$) dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$, si ha:

a > 0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$	x < x_1 e x > x_2	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	impossibile
$\Delta < 0$	Sempre vera	Impossibile

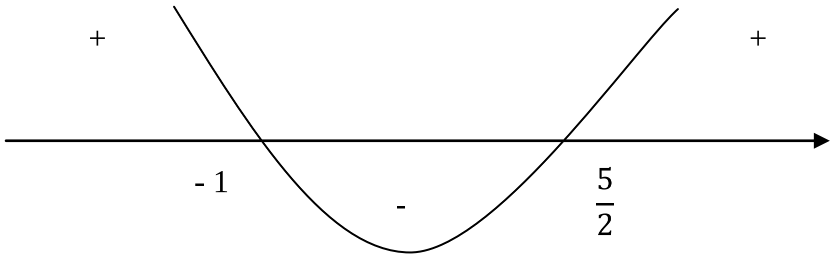
Funzione Daniela Strona

$$\frac{2x^2-3x-5}{4} \geq 0 \qquad \textit{moltiplica per 4 ed ottieni} \qquad 2x^2-3x-5 \geq 0$$

Si deve prima risolvere l'equazione associata

$\frac{2x^2-3x-5}{4} = 0$ moltiplicando per 4 ambo i membri otteniamo $2x^2-3x-5=0$

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{+3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{+3-7}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ \frac{+3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$



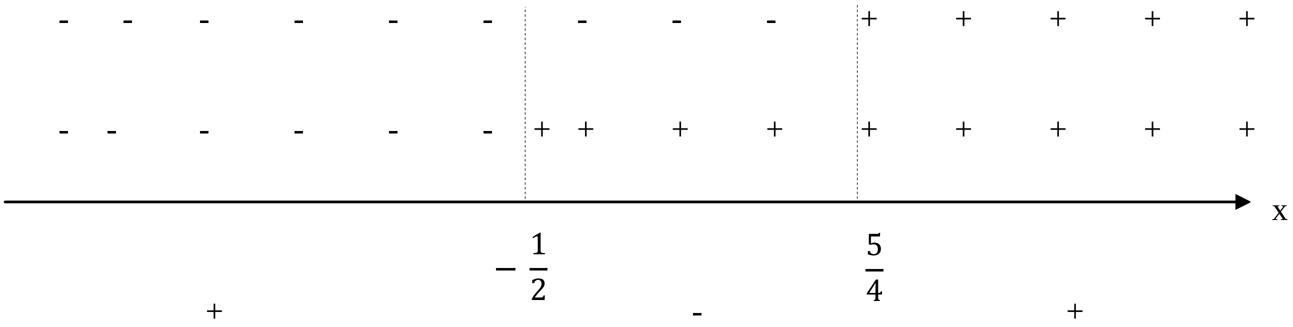
La funzione è positiva per $x \leq -1 \ \vee \ x \geq \frac{5}{2}$

$$y = \frac{4x-5}{2x+1}$$

$$\frac{4x-5}{2x+1} \geq 0$$

$N \geq 0 \qquad 4x-5 \geq 0 \qquad 4x \geq +5 \qquad \frac{4x}{4} \geq \frac{5}{4} \qquad x \geq \frac{5}{4}$

$D > 0 \qquad 2x+1 > 0 \qquad 2x > -1 \qquad \frac{2x}{2} > \frac{-1}{2} \qquad x > -\frac{1}{2}$



$$D = \left]-\infty\,; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{4}\,; +\infty\right[\qquad \text{oppure} \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x \geq \frac{5}{4}\right\}$$

Limiti

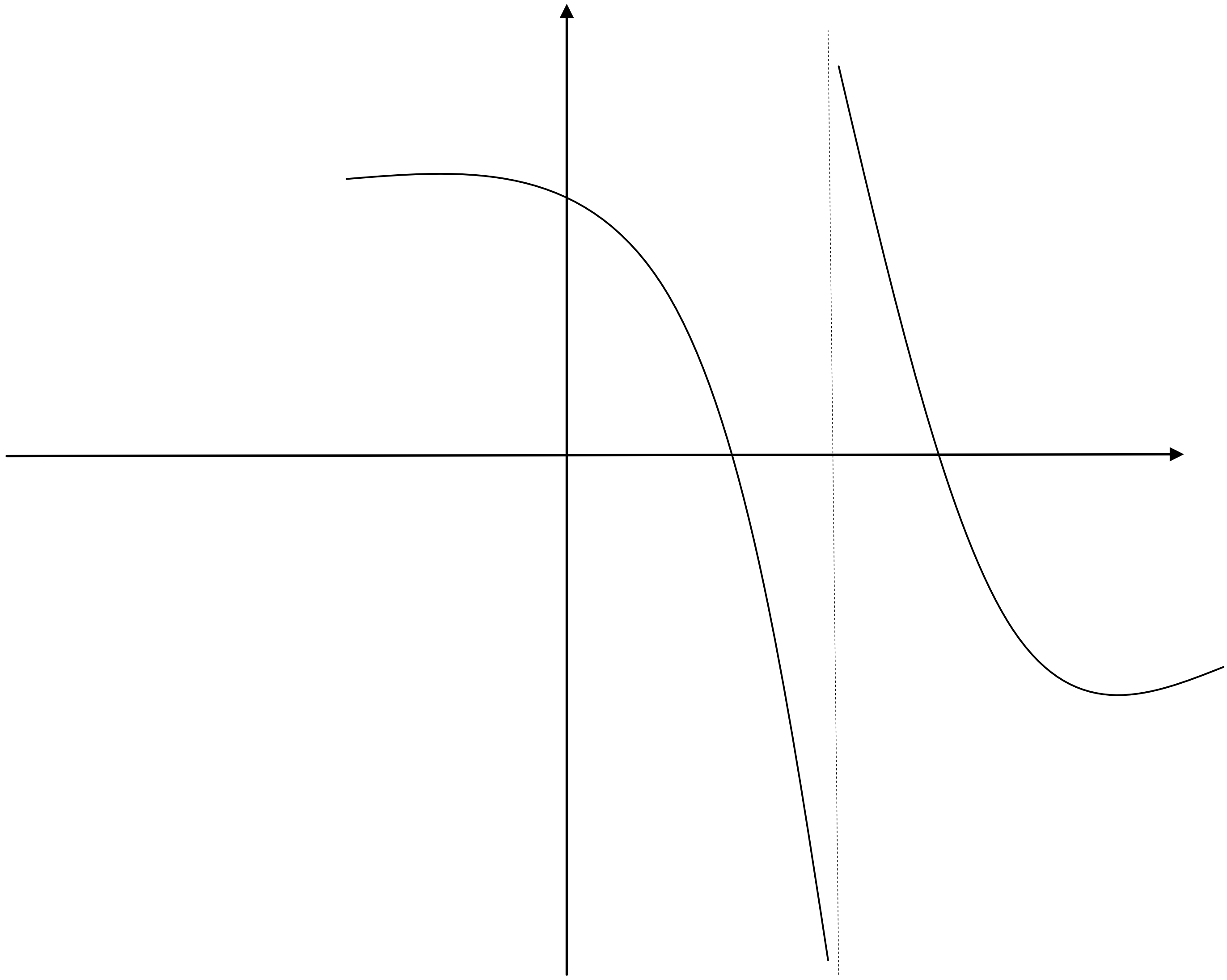
Forma indeterminata $\frac{k}{0}$

$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ Si deve calcolare il limite sinistro e destro

$\lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)(3x-2)}{(x-2)(x+4)} = \infty$ Devo calcolare il limite sinistro e destro

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3(x+1)(3x-2)}{(x-2)(x+4)} = \left[\frac{3(1{,}99+1)(3 \cdot 1{,}99-2)}{(1{,}99-2)(1{,}99+4)} = \frac{3(+2{,}99)(+3{,}97)}{(-0{,}01)(5{,}99)} = \frac{+}{-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3(x+1)(3x-2)}{(x-2)(x+4)} = \left[\frac{3(2{,}01+1)(3 \cdot 2{,}01-2)}{(2{,}01-2)(2{,}01+4)} = \frac{3(+3{,}01)(+4{,}03)}{(+0{,}01)(6{,}01)} = \frac{+}{+}\right] = +\infty$$



Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

- si scompongono numeratore e denominatore
- si semplifica il fattore comune
- si esegue il calcolo del limite così ottenuto

Consideriamo una funzione del tipo $y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$

Si cerca di scomporla in modo da ottenete $y = \frac{(x - x_0)^p (x + a)}{(x - x_0)^q (x + b)}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se p < q} \\ k & \text{se p = q} \\ 0 & \text{se p > q} \end{cases}$$

Devo cercare di scomporre il numeratore e il denominatore il più possibile attraverso:

- Raccoglimento a fattor comune
- Ricordando che $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 si trovano con la formula

  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con delta $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

1. $\lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)(x-2)}{(x-2)^2(x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)}{(x-2)(x+4)} = \pm\infty \ \left(forma\ indeterminata\ \frac{k}{0}\right)$

Il numeratore è un infinitesimo di ordine minore rispetto al denominatore

2. $\lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)}{x+4} = \frac{3(2+1)}{2+4} = \frac{3 \cdot 3}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Il numeratore e il denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine

3. $\lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x+1)(x-2)}{x+4} = 0$

Il numeratore è un infinitesimo di ordine maggiore rispetto al denominatore

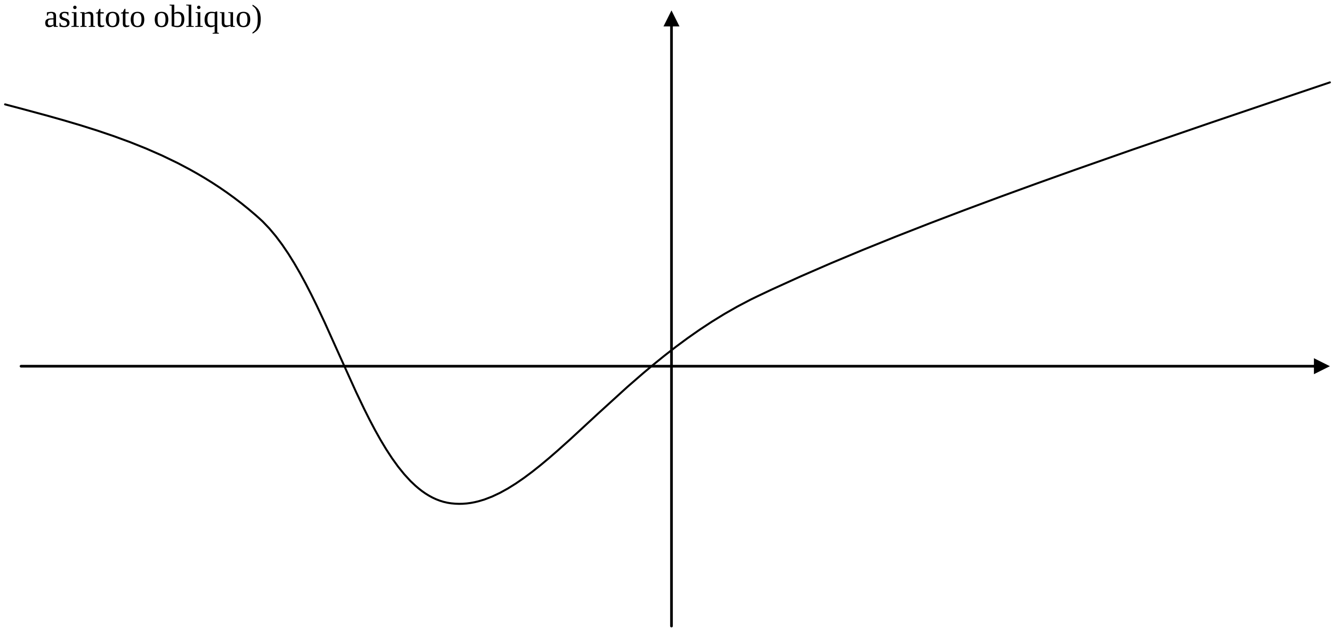
Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Consideriamo una funzione del tipo $y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

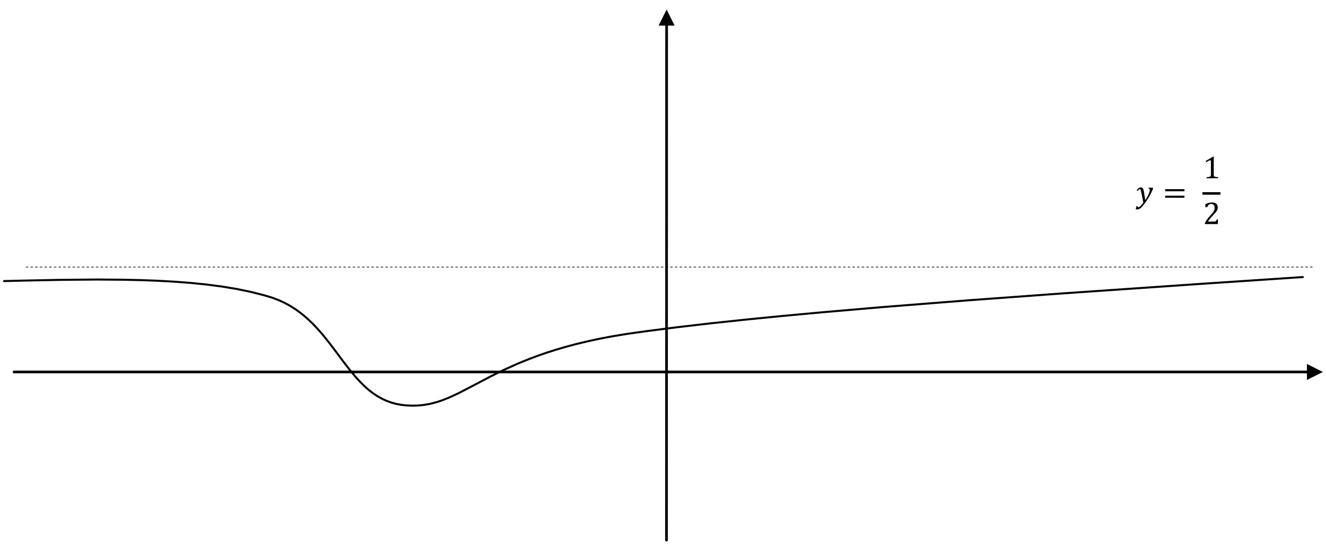
1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 4x + 1}{6x^2 + 7x - 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3}{6x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{6} = \infty$ non esiste asintoto orizzontale

Il numeratore è di grado superiore rispetto al denominatore (in questo caso la funzione ha un asintoto obliquo)



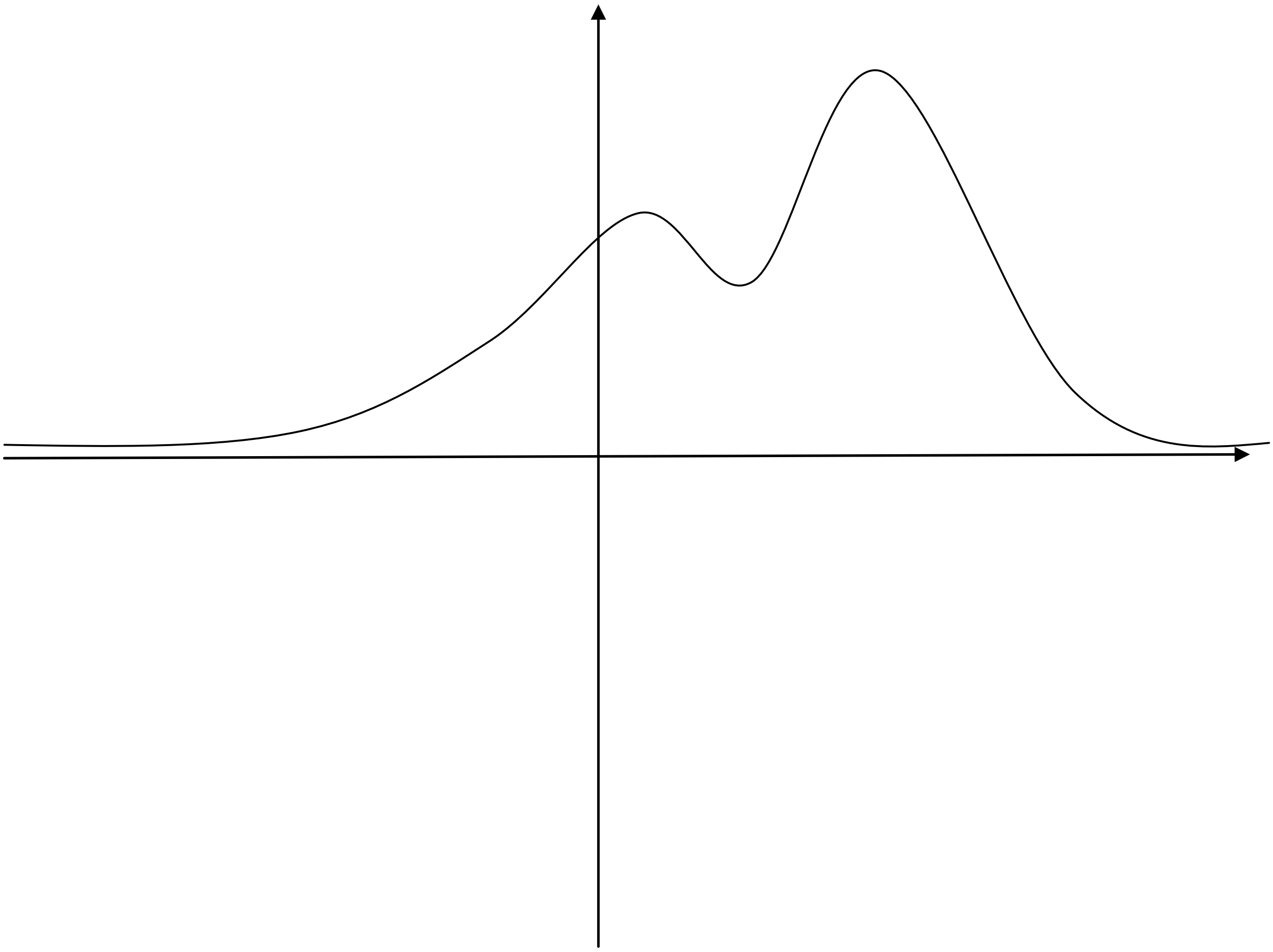
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{6x^2 + 7x - 2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2}{6x^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ asintoto orizzontale

Il numeratore e il denominatore hanno lo stesso grado



3. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-4x+1}{6x^3+7x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{6x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{6x} = 0$ $y = 0$ asintoto orizzontale

Il numeratore è di grado inferiore rispetto al denominatore



Continuità e discontinuità

Funzione continua in un punto

Sia f una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e x_0 un punto interno all'intervallo. La funzione f(x) si dice continua nel punto x_0 quando esiste il $limite\ di\ f(x)$ per $x \to x_0$ e tale limite è uguale al valore di f(x_0) della funzione calcolata in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Non è sempre vero che il limite di una funzione per $x \to x_0$ è uguale al valore della funzione calcolata in x_0 .

Es. la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è definita in 0: non ha significato l'espressione f(0) e quindi neanche il $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Funzione continua in un intervallo

Una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ si dice continua in tale intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Se f(x) e g(x) sono due funzioni definite nello stesso insieme *A e* continue in un punto $c \in A$, allora risultano continue nel punto c anche le seguenti funzioni:

1. $y = kf(x)$
2. $y = f(x) \pm g(x)$
3. $y = f(x) \cdot g(x)$
4. $y = \frac{1}{f(x)}$ $\quad se\ \ f(c) \neq 0$
5. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad se\ \ f(c) \neq 0$
6. $y = kf(x)$
7. $y = f(x) \pm g(x)$
8. $y = f(x) \cdot g(x)$
9. $y = \frac{1}{f(x)}$ $\quad se\ \ f(c) \neq 0$
10. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad se\ \ f(c) \neq 0$

Da ciò segue che le funzioni «elementari», ossia le funzioni:

- razionali (intere e fratte)
- irrazionali
- esponenziali
- logaritmiche
- goniometrìche

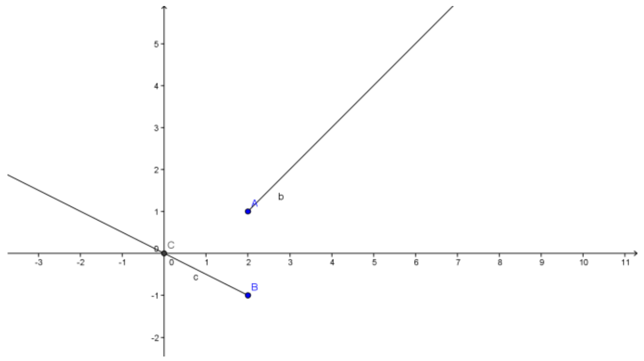
dove esistono, sono continue.

Punti di discontinuità

Un punto x_0 di un intervallo $[a; b]$ si dice **punto di dicontinuità** per una funzione f(x) se la funzione è definita in tutto l'intervallo $[a; b]$, escluso al più x_0 e in tale punto non è continua

Punto di discontinuità di prima specie

- Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per la funzione f(x) quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di f(x) sono entrambi finiti, ma diversi fra loro. La differenza tra il limite destro e il limite sinistro della funzione si chiama salto della funzione in x_0.



$$y = \begin{cases} x - 1 & se\ x > 2 \\ -x & se\ x < 2 \end{cases}$$

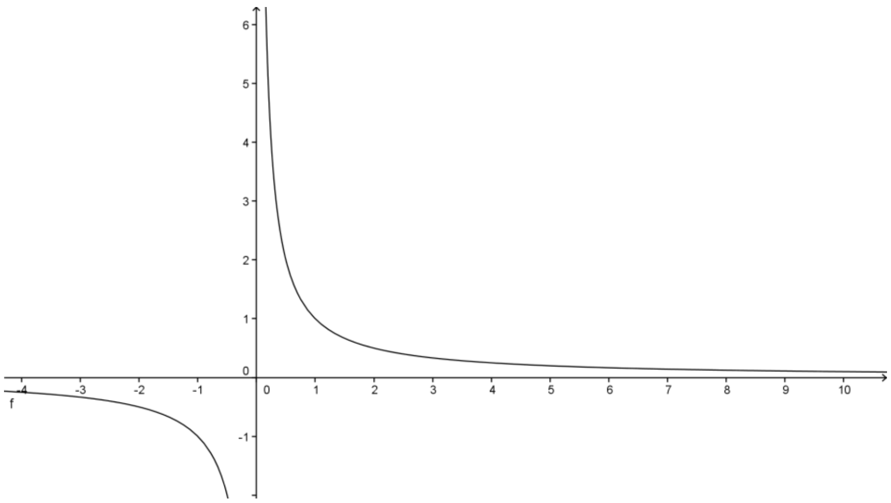
$\lim_{x \to 2^+} (x - 1) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} (-x) = -2$

L'esempio qui sopra riportato fa vedere come la funzione così definita è discontinua in x_0=2, il punto 2 è un punto di discontinuità di prima specie. La distanza fra i due punti A e B in figura viene chiamato **salto.**

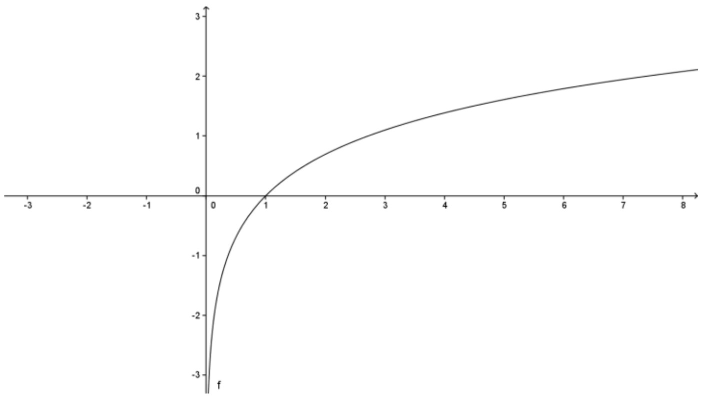
Punto di discontinuità di seconda specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione f(x) quando, per $x \rightarrow x_0$, almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f(x) è infinito, oppure non esiste.



$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} logx = non\ esiste$$

$$\lim_{x \to 0^+} logx = -\infty$$

Punto di discontinuità di terza specie o eliminabile

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione f(x) quando:

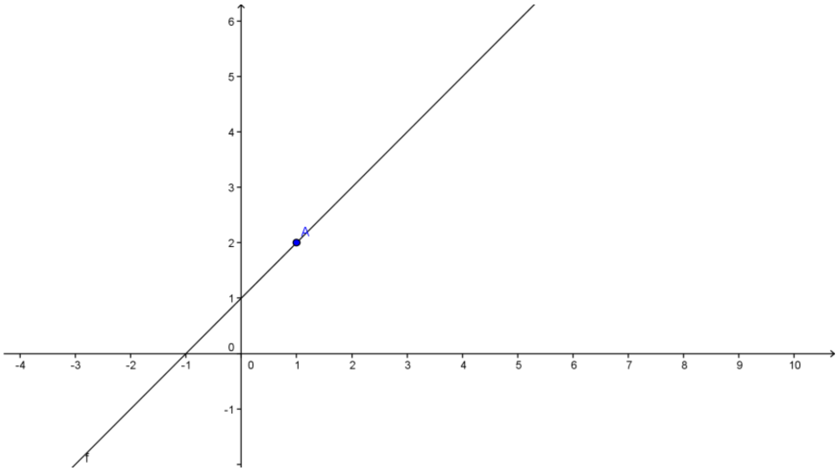
- Esiste ed è finito il limite di f(x) per $x \to x_0$, ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

- f non è definita in x_0 , oppure se lo è, risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l$$

Un punto di discontinuità di terza specie viene anche detto punto di **discontinuità eliminabile.**



$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \quad \left(forma\ indeterminata\ \frac{0}{0}\right)$ scomponendo e semplificando

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Per rendere la funzione continua nel punto x_0 (discontinuità eliminabile)

$$y = \begin{cases} f(x) & se\ x\ \in D \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & se\ x = \ x_0 \end{cases}$$

Asintoti

- ***Asintoto verticale***

Si dice che una retta x = *c è* un ***asintoto verticale*** per il grafico della funzione f(x) se:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$

Gli asintoti verticali di una funzione vanno ricercati negli estremi finiti del dominio *D* della funzione che non appartengono a *D*, oppure nei punti in cui la funzione cambia definizione.

Consideriamo la funzione $y = \frac{2x^2-3x+5}{4x-2}$

Devo trovare il dominio $4x - 2 \neq 0$ $4x \neq +2$ $\frac{4x}{4} \neq \frac{2}{4}$ $x \neq \frac{1}{2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ o $D = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq \frac{1}{2}\right\}$

E poi calcolare il limite

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x - 2} = \infty$$

Riconosco la forma indeterminata $\frac{k}{0}$ e deduco che $x = \frac{1}{2}$ è un asintoto verticale.

- ***Asintoto orizzontale***

Si dice che una retta *y* = *a* è un ***asintoto orizzontale*** per il grafico della funzione f(x) se:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

Consideriamo la funzione $y = \frac{2x^2-3x+5}{4x^2-2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{4x^2 - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La retta $y = \frac{1}{2}$ è un asintoto obliquo

Gli eventuali asintoti orizzontali di una funzione (da ricercarsi solo nel caso in cui il dominio della funzione sia illimitato e la funzione non sia periodica) si trovano calcolando i limiti della funzione per *x* che tende a $\pm\infty$.

- ***Asintoto obliquo***

Se in una funzione del tipo $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ il numeratore ha un grado in più rispetto al denominatore possiamo cercare l'asintoto obliquo $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) dove

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[F(x)\cdot\frac{1}{x}\right] \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\infty}\left[F(x) - mx\right]$$

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1} \cdot \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$q = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1} - 3x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x(x + 1)}{x + 1}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 - 3x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x + 1}{x + 1} = -5$$

L'asintoto obliquo della funzione data è $y = 3x - 5$

Derivata

Sia f(x) una funzione definita in un intervallo [a; b] *e* sia x_0 un punto interno ad esso.

Si dice derivata della funzione f(x) nel punto x_0 il limite, quando *esiste ed è finito*, del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento *h* della variabile

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si definiscono

- Derivata sinistra della funzione f(x) nel punto x_0 il limite, quando esiste finito, $$f_-'(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
- Derivata destra della funzione f(x) nel punto x_0 il limite, quando esiste finito, $$f_+'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Osserviamo che se una funzione è derivabile in un punto x_0 interno all'intervallo in cui essa è definita, si ha: $f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$

• Se una funzione/(x) è derivabile in ogni punto interno all'intervallo *[a; b] e* se ammette derivata destra nel punto *a* e derivata sinistra nel punto *b*, *f(x)* si dice derivabile nell'intervallo chiuso *[a; b]*.

• Se una funzione è derivabile nel punto x_0, allora è necessariamente continua in x_0.

La derivata di una funzione in un punto x_0 *è* un numero e rappresenta il valore del coefficiente angolare *m* della retta tangente al grafico di f(x) nel punto $P(x_0;f(x_0))$.

Si dice funzione derivata della funzione f(x), la funzione f'(x), definita nell'intervallo *I* in cui *f* è derivabile, che associa a ogni punto x_0 di *I*, il numero $f'(x_0)$, cioè la derivata di f in x_0.

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = kx$	$y' = k$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = kx^n$	$y' = knx^{n-1}$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^x \cdot f'(x)$

Massimi e minimi relativi

Sappiamo che se nell'insieme dei valori di una funzione c'è un *M* che è maggiore o uguale di ogni numero dell'insieme, questo numero si chiama *massimo assoluto* della funzione, e, se c'è un numero *m* che è minore o uguale di ogni numero dell'insieme, questo si chiama *minimo assoluto* della funzione.

Introduciamo ora i concetti di ***massimo*** **e** ***minimo relativo***.

Sia *f(x)* una funzione reale definita nell'intervallo *[a; b]* e x_0 un punto di questo intervallo. Se esiste un intorno $H \subset [a; b]$ del punto x_0, per ogni x del quale , diverso da x_0 risulta:

- $f(x) \leq f(x_0)$, si dice che x_0 *è* un punto di **massimo relativo;**
- $f(x) \geq f(x_0)$ si dice che x_0 è un punto di **minimo relativo;**
- $f(x) < f(x_0)$ si dice che x_0 è un punto di **massimo relativo proprio**
- $f(x) > f(x_0)$ si dice che x_0 *è* un punto di **minimo relativo proprio**

I punti di massimo e minimo relativo si dicono anche **estremanti** (o *locali),* oppure **punti di estremo relativo** della funzione. Il valore che *f(x)* assume in un punto di massimo o minimo relativo si chiama **un massimo o un minimo relativo** *di f(x).*

Teorema di Fermat

Se x_0 è un punto **interno** all'intervallo I in cui la funzione f(x) è derivabile e x_0 *è* un punto di **massimo** (o di **minimo)** relativo, la derivata prima in quel punto è uguale a zero, cioè risulta:

$f'(x_0) = 0$

se x_0 è un punto di minimo o di massimo relativo $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

se $f'(x_0) = 0$ non si può essere certi che sia un punto di minimo o di massimo relativo per la funzione.

Teorema

Sia *f(x)* una funzione derivabile in un intorno *H* del punto x_0 e sia $f'(x_0) = 0$.

1. *Se* $f'(x) < 0$ per ogni $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x > x_0$ *(* $x \in H$ *),* allora x_0 è un punto di **minimo relativo proprio** *per f(x).*
2. *Se* $f'(x) > 0$ per ogni $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x > x_0$ *(* $x \in H$ *),* allora x_0 è un punto di **massimo relativo proprio** *per f(x).*
3. *Se* $f'(x) > 0$ *(*oppure $f'(x) < 0$) sia ogni $x < x_0$ e sia per ogni $x > x_0$ *(* $x \in H$ *),* allora x_0 non è un punto **né di minimo né di massimo relativo** *per f(x).*

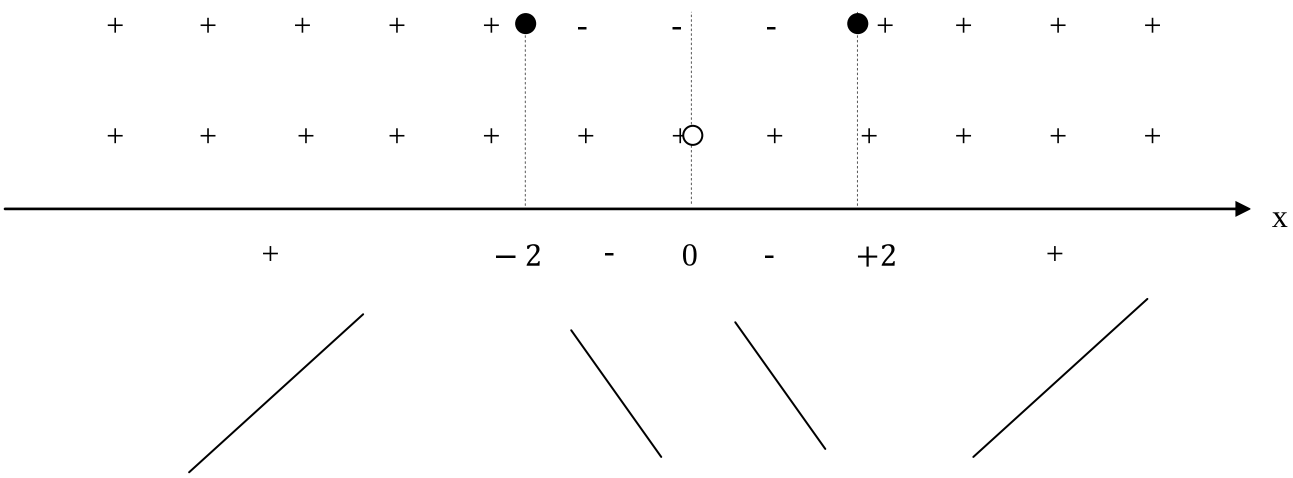
Supponiamo che $y' = \frac{2x^2-8}{(2x)^2}$ è la derivata di una funzione $y = f\ (x)$.

Per trovare i massimi e minimi devo porre la derivata maggiore o uguale a zero.

$$\frac{2x^2-8}{(2x)^2} \geq 0$$

$N\ \geq 0 \qquad 2x^2 - 8\ \geq 0 \qquad 2(x^2-4) \geq\ 0 \qquad x^2 - 4\ \geq 0 \qquad x\ \leq -2\ \vee x\ \geq\ +2$

$D\ > 0 \qquad (2x)^2 > 0 \qquad 2x\ \neq 0 \qquad x\ \neq 0$ devi sempre porre il termine dentro la parentesi diverso da zero



La derivata è positiva per $x\ \leq\ -2\ \vee x\ \geq\ +2$ e quindi in questi intervalli la funzione è crescente. In $x = 0$ la funzione e la derivata non esistono (valore escluso dal dominio = pallino vuoto).Altrove la derivata è negativa e la funzione decrescente.

Per i due teoremi precedenti possiamo affermare che $x = -2$ è un massimo relativo e $x = +2$ è un minimo relativo.

.

Studio di funzione

I concetti appresi fino a questo punto (limiti, derivate, asintoti, massimi, minimi e flessi) ci consentono di intraprendere il cosiddetto **studio di funzione,** cioè lo studio delle proprietà di una funzione allo scopo di tracciarne un grafico indicativo che ne evidenzi le principali caratteristiche.

Per *studiare* una funzione, si può procedere per passi, come qui di seguito descritto.

1. Determinare l'**insieme di esistenza** (o dominio, o insieme di definizione) della funzione *f(x),* le eventuali **simmetrie** del suo grafico rispetto all'asse *y* o all'origine delle coordinate e la eventuale **periodicità.**
2. Determinare il **segno** di *f(x)* e gli eventuali **punti di intersezione del** grafico con gli assi coordinati.

3. Studiare il **comportamento** della funzione quando la variabile tende **agli estremi** degli intervalli (limitati o illimitati) che compongono l'insieme di esistenza.
4. Determinare gli eventuali **asintoti verticali, orizzontali ed obliqui** per il grafico della funzione.
5. Trovare gli intervalli in cui la funzione è **crescente o decrescente** e i suoi **massimi e minimi** relativi.
6. Determinare la **concavità, la convessità** e, quando sia possibile, i **flessi.**
7. Disegnare il **grafico** della funzione.

Per renderlo più fedele al reale andamento della funzione, sarà opportuno, in generale, calcolare le coordinate di qualche altro punto del grafico servendosi dell'equazione $y = f(x)$.